Dedukti : un vérificateur de preuves universel

Ronan Saillard

Centre de recherche en informatique - MINES ParisTech

ronan.saillard@mines-paristech.fr

Contexte et objectif

- **Dedukti** est un vérificateur de type pour $\lambda\Pi$-calcul modulo.
- Le **$\lambda\Pi$-calcul modulo** est un langage très expressif qui permet d'encoder les preuves de nombreux formalismes logiques.
- Le $\lambda\Pi$-calcul modulo est une extension du λ-calcul avec des **types dépendants** et une relation de conversion étendue par des **règles de réécriture** préalablement ajoutées au contexte.
- Dedukti est capable de vérifier les preuves provenant de **prouveurs de théorèmes** (Zenon, iProver) et **d'assistants de preuves** (Coq, HOL, Focalize).
- On montre à travers plusieurs tests que l'utilisation de la réécriture caractéristique du $\lambda\Pi$-calcul modulo permet d'obtenir des **preuves plus petites** et **plus rapides** à vérifier.

Traducteurs

Pour vérifier une preuve avec **Dedukti**, il faut d'abord l'exprimer dans le **$\lambda\Pi$-calcul modulo**. Pour cela, on utilise des **traducteurs** spécialisés :

- **Holide** traduit les preuves de l'assistant de preuve **HOL Light**.
- **Coqine** traduit les preuves de l'assistant de preuve **Coq**.
- **Zenonide** traduit les preuves du prouveur de premier ordre **Zenon**.
- **Focalide** traduit les programmes certifiés de **FoCaLiZe**.
- Une extension du prouveur **iProver** permet de traduire ses preuves.

Ces logiciels sont développés au sein de l'équipe Deducteam de INRIA pour Ali Assaf, Guillaume Burel, Raphaël Cauderlier, Frédéric Gilbert et Pierre Halmagrand.

Règles de typage

$$\textbf{(Empty)}\ \frac{}{\emptyset\ wf} \qquad \textbf{(Dec)}\ \frac{\Gamma \vdash A : s \quad x \notin \Gamma}{\Gamma(x : A)\ wf}$$

$$\textbf{(Rw)}\ \frac{\Gamma\Delta \vdash l : T \quad \Gamma\Delta \vdash r : T \quad FV(r) \cap \Delta \subset FV(l)}{\Gamma([\Delta]l \hookrightarrow r)\ wf}$$

$$\textbf{(Type)}\ \frac{\Gamma\ wf}{\Gamma \vdash \textbf{Type} : \textbf{Kind}} \qquad \textbf{(Var/Cst)}\ \frac{\Gamma\ wf \quad (x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}$$

$$\textbf{(Abs)}\ \frac{\Gamma \vdash A : \textbf{Type} \quad \Gamma(x : A) \vdash t : B \quad B \neq \textbf{Kind}}{\Gamma \vdash \lambda x^A.t : \Pi x^A.B}$$

$$\textbf{(Prod)}\ \frac{\Gamma \vdash A : \textbf{Type} \quad \Gamma(x : A) \vdash B : s}{\Gamma \vdash \Pi x^A.B : s}$$

$$\textbf{(App)}\ \frac{\Gamma \vdash t : \Pi x^A.B \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash tu : B[x \backslash u]} \qquad \textbf{(Conv)}\ \frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash B : s \quad A \equiv_{\beta\Gamma} B}{\Gamma \vdash t : B}$$

Règles de typage du $\lambda\Pi$-calcul modulo.

Implémentation

- Un millier de lignes de code **OCaml** pour le vérificateur de types du $\lambda\Pi$-calcul modulo.
- Une machine de réduction **call-by-need** pour la **β-réduction** et les **règles de réécriture** ajoutées.
- La compilation des **règles de réécriture** (possiblement non linéaires) en **arbres de décision** pour une réécriture efficace.
- Un **licence libre** : CeCILL-B.

Encodage léger vs. profond

L'encodage d'un système logique $\mathcal{L}$ dans le $\lambda\Pi$-calcul modulo est dit **léger** s'il a les caractéristiques suivantes :

- Utilisation de la **syntaxe abstraite d'ordre supérieur**.
- Préservation de la notion de **typage** : $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} t : T \Rightarrow |\Gamma| \vdash_{\lambda\Pi} \|t\| : |T|$
- Préservation de la notion de **calcul** : $t_1 \rightarrow_{\mathcal{L}} t_2 \Rightarrow \|t_1\| \rightarrow_{\lambda\Pi} \|t_2\|$

Dans le cas contraire on parle d'encodage **profond**.

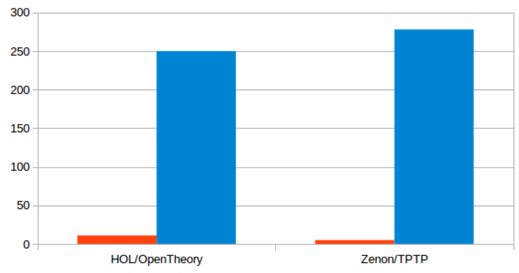
Expérience

On compare, sur deux jeux de tests différents, des encodage avec et sans règles de réécriture.

- Le premier test concerne 86 fichiers de la bibliothèque de preuves et théorèmes **OpenTheory** tels qu'encodés par **Holide**.
- Le deuxième test concerne 520 fichiers correspondant à des preuves de théorèmes de la bibliothèque **TPTP**, obtenus grâce au prouveur **Zenon**. La bibliotèque TPTP est le jeu de test standard des prouveurs automatiques.

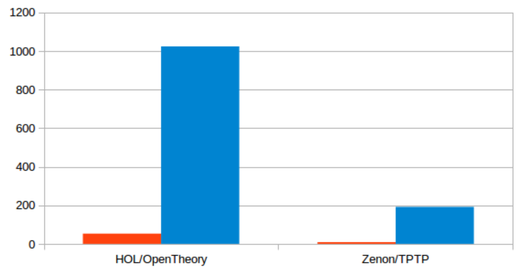
Les tests ont été réalisés sur un portable Linux muni d'un processeur Intel Core i7-3520M CPU @ 2.90GHz x 4 et de 16GB de Ram.

Résultats



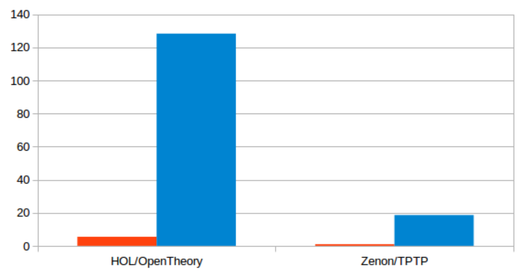
La vérification des preuves encodées en utilisant les règles de réécriture est **23 fois plus rapide** pour OpenTheory et est **55 fois plus rapide** pour TPTP.

Temps de vérification (en secondes)



La taille des fichier obtenus après encodage est autour de **20 fois inférieure** lorsqu'on utilise des règles de réécritures.

Taille des fichiers (en mégaoctets)



Le nombre de tests de conversion effectués lors de la vérification des preuves de **OpenTheory** est **23 fois inférieur** pour l'encodage avec règle de réécriture et **18 fois inférieur** pour TPTP.

Nombre de tests de conversion (en millions)

Légende : encodage léger - encodage profond

Vers l'interopérabilité

- Les systèmes de preuves actuels souffrent d'un manque d'**interopérabilité**. Il est difficile de réutiliser une théorie d'un système dans un autre sans refaire toutes les preuves.
- La traduction de ces différents systèmes dans un formalisme commun permettra de **combiner** leurs preuves pour construire des théories plus larges.

Dedukti et les différents traducteurs sont disponibles à l'adresse suivante : `https://www.rocq.inria.fr/deducteam/software.html`